## EPREUVE DE MATHEMATIQUES APPLIQUEES

**DUREE : 1 heure.** (toutes options)

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose : $I_n = \int_0^1 \frac{1}{(1+t^2)^n}\,dt$.

   a. Préciser $I_0$ et $I_1$.

   b. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, donner une relation entre $I_n$ et $I_{n+1}$.

   c. Déterminer : $\lim_{n\to+\infty} (n\,2^n I_n)$ et $\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{I_n}{I_{n+1}}\right)$.

2. a. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $H_n = \int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+t^2)^n}\,dt$.
   Donner une relation entre $H_n$ et $H_{n+1}$, et calculer $H_n$.

   b. En admettant la formule de Stirling : $k! \underset{+\infty}{\sim} \sqrt{2.\pi.k}.\left(\frac{k}{e}\right)^k$, donner un équivalent de $H_n$ quand n tend vers $+\infty$.

   c. Montrer que, $n \in \mathbb{N}^* : 0 \le H_n - I_n \le \frac{\pi}{2^{n+1}}$.

   d. En déduire la valeur de : $\lim_{n\to+\infty} \left(\sqrt{n}\,I_n\right)$, et préciser : $\lim_{n\to+\infty} I_n$.

3. Pour $x \in ]-1, 1[$, on pose : $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} I_n x^n$.

   a. Justifier que f est bien définie et de classe $C^\infty$ sur $]-1, 1[$.

   b. On admet que pour $x \in ]-1, 1[$, $f(x) = \int_0^1 \frac{t^2+1}{t^2+(1-x)}\,dt$. Calculer la valeur de cette intégrale.

   c. Pour $x \in ]-1, 1[$, on pose : $\theta = \text{Arc tan}\left(\frac{1}{\sqrt{1-x}}\right)$. Exprimer, pour $x \neq 0$, $f(x)$ au moyen de $\frac{2\theta}{\tan(2\theta)}$.

   d. En déduire les variations de f sur $]-1, 1[$.

4. a. Justifier l'existence de $U = \int_{-1}^1 f(x)dx$.

   b. Utiliser le changement de variable défini en 3.c. afin de donner une autre expression de U en fonction de $V = \int_\alpha^{\frac{\pi}{2}} \frac{\theta \cos^4(\theta)}{\sin^4(\theta)}\,d\theta$ où $\alpha = \text{Arc tan}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

5. a. Justifier la convergence de la série : $S = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{I_{2n}}{2n+1}$.

   b. Ecrire un algorithme permettant le calcul de $S_N = \sum_{n=0}^{N} \frac{I_{2n}}{2n+1}$ pour une certaine valeur de l'entier $N \ge 1$. On pourra présenter celui-ci en pseudo-langage, ou sous l'aspect d'une procédure Turbo Pascal.

   c. Utiliser une calculette, afin d'évaluer $2.S_{10}$. On donnera le résultat avec 4 décimales.